“‘latex Valor Esperado e a Linearidade da Esperança

Neste capítulo, desenvolvemos a base teórica e probabilística que fundamenta nossa dissertação, apresentando os conceitos e demonstrações de maneira acessível ao nível do Ensino Médio, sem recorrer a ferramentas avançadas como o cálculo integral. Adotaremos a terminologia **valor esperado** (ou valor médio) para construir as ideias passo a passo, de forma rigorosa e contínua.

1 Introdução ao Conceito de Valor Esperado

Quando realizamos um experimento cujos resultados dependem do acaso, não conseguimos prever com certeza qual será o resultado exato de uma única execução. No entanto, podemos calcular uma média ponderada dos valores possíveis, ponderada pelas respectivas probabilidades de cada acontecimento. Esse número resultante é chamado de valor esperado.

1.1 Exemplos Básicos

Exemplo 1: O Jogo de Cara ou Coroa
Imagine um jogo em que uma moeda perfeita é lançada. Se sair cara, o jogador ganha 10 euros; se sair coroa, o jogador perde 1 euro. As probabilidades de sair cara ou coroa são iguais a $\frac{1}{2}$. O valor esperado do ganho por jogada é obtido multiplicando cada resultado pela sua probabilidade e somando os valores:

$$VE = 10 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 5 - 0,5 = 4,5 euros.$$

Este resultado significa que, em média, o ganho esperado por jogada a longo prazo é de 4,50 euros.

Exemplo 2: O Lançamento de um Dado
Considere o lançamento de um dado comum com faces de 1 a 6, todas com probabilidade $\frac{1}{6}$. Seja X o valor da face voltada para cima. O valor esperado de X é:

$$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3,5.$$

O valor 3.5 indica a média aritmética obtida se repetirmos o lançamento muitas vezes, mesmo que o dado nunca apresente essa face em uma jogada isolada.

1.2 Exemplo Avançado: O Jogo do Blefe e Tomada de Decisão

Para aprofundar o conceito de valor esperado em um nível analítico mais rico e adequado à fundamentação da nossa dissertação, consideremos uma situação de tomada de decisão estratégica sob incerteza, inspirada em problemas de análise de jogos.

Imagine que um jogador realiza uma aposta blefando no valor de $R\$50,00$. Se o adversário aceitar a aposta, o blefe é descoberto e o primeiro jogador perde os $R\$50,00$ apostados. No entanto, se o adversário decidir abandonar o jogo (desistir), o primeiro jogador recolhe o pote total em disputa, que é de $R\$100,00$ de ganho líquido.

Com base em históricos anteriores de partidas entre os oponentes, sabe-se que o adversário costuma pagar a aposta em 50% das situações (probabilidade de $0,5$) e abandonar o jogo nas outras 50% das vezes (probabilidade de $0,5$).

Vamos calcular o valor esperado associado à decisão de blefar:

$$E[Blefe] = (+100) \cdot P(Abandono) + (-50) \cdot P(Aceitação)$$

Substituindo os valores das probabilidades:

$$E[Blefe] = 100 \cdot (0,5) + (-50) \cdot (0,5) = 50 - 25 = 25 reais.$$

1.3 Exemplo Ampliado: Gestão de Portfólio de Seguros com Múltiplas Apólices

Para avançarmos em direção a cenários estocásticos mais complexos e aplicarmos a propriedade aditiva que estudaremos na sequência, vamos expandir o problema da seguradora introduzindo múltiplos tipos de riscos e apólices em um mesmo portfólio. Essa ampliação evidencia como o valor esperado lida de forma natural com a expansão de variáveis aleatórias.

Considere que a companhia de seguros gerencia simultaneamente dois tipos de apólices distintas no mercado:

- **Apólice Tipo 1 (Residencial):** Prêmio anual de $R\$4.000,00$ e probabilidade de sinistro total igual a 1% $(0,01)$. O lucro líquido associado a essa apólice individual, que denotaremos por X_1, assume os valores -196.000 (com probabilidade $0,01$) ou $+4.000$ (com probabilidade $0,99$).
- **Apólice Tipo 2 (Automotiva):** Prêmio anual de $R\$2.000,00$ e probabilidade de sinistro total de 4% $(0,04)$, com uma indenização estipulada em $R\$40.000,00$. O resultado financeiro líquido dessa apólice, denotado por X_2, assume o valor de $2.000 - 40.000 = -38.000$ (com probabilidade $0,04$) ou o valor de $2.000 - 0 = +2.000$ (com probabilidade $0,96$).

Calculamos primeiramente o valor esperado de cada apólice de maneira isolada:

$$E[X_1] = (-196.000) \cdot (0,01) + (4.000) \cdot (0,99) = -1.960 + 3.960 = 2.000 reais.$$

$$E[X_2] = (-38.000) \cdot (0,04) + (2.000) \cdot (0,96) = -1.520 + 1.920 = 400 reais.$$

Se a empresa emitir um pacote contendo uma apólice do Tipo 1 e uma apólice do Tipo 2, o ganho financeiro total do portfólio será a soma das variáveis aleatórias $X_1 + X_2$. Graças à propriedade da linearidade do valor esperado —

que demonstraremos formalmente nas próximas seções —, o ganho esperado combinado para o pacote de apólices é obtido diretamente pela soma dos valores esperados individuais:

$$E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2] = 2.000 + 400 = 2.400 reais.$$

Este exemplo ilustra com clareza o poder operacional da linearidade: em vez de reconstruir o espaço amostral conjunto com todas as combinações complexas de sinistros simultâneos entre carros e residências, podemos decompor o problema em componentes menores, calcular a expectativa de cada parte e somar os resultados. A validade dessa aditividade, mesmo quando os riscos possuem correlações ou dependências entre si, constituirá o alicerce fundamental para a nossa abordagem geométrica posterior, cujos desdobramentos analíticos serão aprofundados mais adiante nesta dissertação.

1.4 Exemplo Ampliado: Gestão de Portfólio de Seguros com Múltiplas Apólices

Para avançarmos em direção a cenários estocásticos mais complexos e aplicarmos a propriedade aditiva que estudaremos na sequência, vamos expandir o problema da seguradora introduzindo múltiplos tipos de riscos e apólices em um mesmo portfólio. Essa ampliação evidencia como o valor esperado lida de forma natural com a expansão de variáveis aleatórias.

Considere que a companhia de seguros gerencia simultaneamente dois tipos de apólices distintas no mercado:

- **Apólice Tipo 1 (Residencial):** Prêmio anual de $R\$4.000,00$ e probabilidade de sinistro total igual a 1% $(0,01)$. O lucro líquido associado a essa apólice individual, que denotaremos por X_1, assume os valores -196.000 (com probabilidade $0,01$) ou $+4.000$ (com probabilidade $0,99$).
- **Apólice Tipo 2 (Automotiva):** Prêmio anual de $R\$2.000,00$ e probabilidade de sinistro total de 4% $(0,04)$, com uma indenização estipulada em $R\$40.000,00$. O resultado financeiro líquido dessa apólice, denotado por X_2, assume o valor de $2.000 - 40.000 = -38.000$ (com probabilidade $0,04$) ou o valor de $2.000 - 0 = +2.000$ (com probabilidade $0,96$).

Calculamos primeiramente o valor esperado de cada apólice de maneira isolada:

$$E[X_1] = (-196.000) \cdot (0,01) + (4.000) \cdot (0,99) = -1.960 + 3.960 = 2.000 reais.$$

$$E[X_2] = (-38.000) \cdot (0,04) + (2.000) \cdot (0,96) = -1.520 + 1.920 = 400 reais.$$

Se a empresa emitir um pacote contendo uma apólice do Tipo 1 e uma apólice do Tipo 2, o ganho financeiro total do portfólio será a soma das variáveis aleatórias $X_1 + X_2$. Graças à propriedade da linearidade do valor esperado — que demonstraremos formalmente nas próximas seções —, o ganho esperado

combinado para o pacote de apólices é obtido diretamente pela soma dos valores esperados individuais:

$$E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2] = 2.000 + 400 = 2.400 reais.$$

Este exemplo ilustra com clareza o poder operacional da linearidade: em vez de reconstruir o espaço amostral conjunto com todas as combinações complexas de sinistros simultâneos entre carros e residências, podemos decompor o problema em componentes menores, calcular a expectativa de cada parte e somar os resultados. A validade dessa aditividade, mesmo quando os riscos possuem correlações ou dependências entre si, constituirá o alicerce fundamental para a nossa abordagem geométrica posterior, cujos desdobramentos analíticos serão aprofundados mais adiante nesta dissertação.

2 A Relação entre Valor Esperado e Probabilidade: Variáveis Indicadoras

Até o momento, observamos exemplos em que o valor esperado representa grandezas monetárias ou pontuações (como nos jogos de aposta e no lançamento de dados), cujos resultados numéricos não coincidem com o conceito de probabilidade. Contudo, existe uma classe particular e fundamental de variáveis aleatórias em que o valor esperado se iguala exatamente à probabilidade de ocorrência de um evento. Essa ponte conceitual constitui a ferramenta central para o tratamento dos problemas de probabilidade geométrica que serão explorados nos capítulos subsequentes.

2.1 Quando o Valor Esperado é Igual à Probabilidade

Considere um evento qualquer A associado a um experimento aleatório, cuja probabilidade de ocorrência é $P(A) = p$. Podemos definir uma variável aleatória especial, chamada de **variável indicadora** (ou função característica) do evento A, denotada por I_A, da seguinte forma:

$$I_A = \{\, 1 \,, seoeventoAocorre; 0, seoeventoAnãoocorre \ (ouseja, A^c).$$

Vamos calcular o valor esperado dessa variável indicadora I_A passo a passo. Os únicos valores possíveis que I_A pode assumir são 1 e 0. As probabilidades associadas a esses valores são: * $P(I_A = 1) = P(A) = p$ * $P(I_A = 0) = P(A^c) = 1 - p$

Aplicando a definição de valor esperado para uma variável discreta:

$$E[I_A] = 1 \cdot P(I_A = 1) + 0 \cdot P(I_A = 0)$$

Substituindo os valores das probabilidades:

$$E[I_A] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p = P(A).$$

Acabamos de demonstrar um resultado notável: **o valor esperado de uma variável indicadora é exatamente igual à probabilidade do evento correspondente**, ou seja:

$$E[I_A] = P(A).$$

2.2 Quando o Valor Esperado Não É Igual à Probabilidade

Em contraste, quando a quantidade aleatória sob estudo assume valores numéricos diferentes de 0 e 1, o valor esperado expressa uma média ponderada de magnitudes físicas, financeiras ou geométricas, não havendo identidade numérica direta com a probabilidade.

Retornando ao exemplo do lançamento de um dado não viciado, em que a variável X assume os valores $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ com probabilidade $\frac{1}{6}$ para cada face, calculamos:

$$E[X] = 3,5 \neq P(X = k) = \frac{1}{6} \quad (paraqualquer k \in \{1, \ldots, 6\}).$$

Nesse cenário, o valor esperado de X representa o centro de massa da distribuição de frequências dos valores das faces, enquanto a probabilidade mede a chance de ocorrência de uma face isolada.

[Nota de Percurso] A equivalência entre o valor esperado de uma variável indicadora e a probabilidade de um evento ($E[I_A] = P(A)$), combinada com a propriedade da linearidade, formará a base conceitual com a qual modelaremos as interseções geométricas da agulha de Buffon. O uso formal e aprofundado das variáveis indicadoras para contar cruzamentos de retas sem o recurso ao cálculo integral serão desenvolvidos em detalhe no Capítulo 4 desta dissertação.

2.3 Quando o Valor Esperado Não É Igual à Probabilidade

Em contraste, quando a quantidade aleatória sob estudo assume valores numéricos diferentes de 0 e 1, o valor esperado expressa uma média ponderada de magnitudes físicas, financeiras ou geométricas, não havendo identidade numérica direta com a probabilidade.

Retornando ao exemplo do lançamento de um dado não viciado, em que a variável X assume os valores $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ com probabilidade $\frac{1}{6}$ para cada face, calculamos:

$$E[X] = 3,5 \neq P(X = k) = \frac{1}{6} \quad (paraqualquer k \in \{1, \ldots, 6\}).$$

Nesse cenário, o valor esperado de X representa o centro de massa da distribuição de frequências dos valores das faces, enquanto a probabilidade mede a chance de ocorrência de uma face isolada.

[Nota de Percurso] A equivalência entre o valor esperado de uma variável indicadora e a probabilidade de um evento ($E[I_A] = P(A)$), combinada com a propriedade da linearidade, formará a base conceitual com a qual modelaremos as interseções geométricas da agulha de Buffon. O uso formal e aprofundado das

variáveis indicadoras para contar cruzamentos de retas sem o recurso ao cálculo integral serão desenvolvidos em detalhe no Capítulo 4 desta dissertação.

3 Definição Formal e Intuitiva de Valor Esperado

Para formalizar a ferramenta conceitual do valor esperado sem recorrer ao formalismo excessivo ou a ferramentas do cálculo integral, podemos construí-la a partir de uma extensão natural da média aritmética ponderada para espaços de probabilidade finitos e discretos.

[Valor Esperado de uma Variável Aleatória Discreta] Seja X uma variável aleatória discreta definida em um espaço amostral finito Ω, a qual assume valores numéricos reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ com as respectivas probabilidades $P(X = x_1), P(X = x_2), \ldots, P(X = x_n)$. O **valor esperado** de X, denotado por $E[X]$, é definido pela soma ponderada de cada valor possível multiplicado pela respectiva probabilidade de ocorrência:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n).$$

3.1 A Relação entre Valor Esperado e Probabilidade

É fundamental observar que o valor esperado e a probabilidade de um evento constituem conceitos de naturezas matemáticas distintas. Contudo, eles se relacionam diretamente no caso particular das chamadas variáveis indicadoras.

Dizemos que uma variável aleatória I_A é a indicadora de um evento A quando ela assume exclusivamente o valor 1 se o evento A ocorre e o valor 0 se o evento A não ocorre (A^c):

$$I_A = \{\, 1 \,, se A ocorre 0, se A não ocorre$$

Calculando o valor esperado dessa variável indicadora pela definição:

$$E[I_A] = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot P(A^c) = P(A).$$

Portanto, **o valor esperado de uma variável indicadora coincide exatamente com a probabilidade do evento correspondente**. Em contrapartida, para variáveis gerais que assumem múltiplos valores numéricos (como no lançamento de um dado convencional), o valor esperado representa uma medida de tendência central (uma média de longo prazo ponderada pelas chances) e não se iguala à probabilidade de uma face isolada. Essa distinção e a propriedade de conversão de eventos geométricos em esperança de indicadores serão aprofundadas e utilizadas de forma central nas aplicações analíticas apresentadas mais adiante nesta dissertação.

3.2 Extensão para Múltiplas Variáveis Aleatórias e o Teorema Geral da Aditividade

Para consolidarmos a base matemática com o rigor científico necessário ao nível de mestrado profissional, podemos demonstrar de forma completa e sem saltos lógicos a extensão da propriedade da linearidade para um número finito qualquer de variáveis aleatórias. Esse resultado garante que a soma das expectativas de n componentes estocásticos quaisquer coincide com a expectativa da soma total, independente da presença ou ausência de correlação entre eles.

[Linearidade Geral do Valor Esperado para n Variáveis] Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias discretas definidas em um mesmo espaço amostral finito Ω, cada uma possuindo valor esperado finito $E[X_i]$. Sejam $c_1, c_2, \ldots, c_n$ números reais constantes. Então, o valor esperado da combinação linear é dado por:

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot E[X_i]$$

[Demonstração por Indução Matemática Passo a Passo] A demonstração formal e rigorosa deste resultado procede por indução sobre o número de variáveis n.

Base da Indução ($n = 1$): Para uma única variável aleatória X_1 e uma constante c_1, temos por definição direta da ponderação linear:

$$E[c_1 \cdot X_1] = \sum_{j} (c_1 \cdot x_{1j}) \cdot P(X_1 = x_{1j}) = c_1 \cdot \sum_{j} x_{1j} \cdot P(X_1 = x_{1j}) = c_1 \cdot E[X_1].$$

A propriedade vale trivialmente para $n = 1$.

Hipótese de Indução: Assumimos que o resultado é verdadeiro para um número $k \geq 1$ de variáveis aleatórias, ou seja:

$$E\left[\sum_{i=1}^{k} c_i \cdot X_i\right] = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot E[X_i].$$

Passo Indutivo ($n = k + 1$): Queremos provar que a propriedade se sustenta para $k+1$ variáveis. Escrevemos a soma total agrupando as primeiras k parcelas e a última parcela:

$$E\left[\sum_{i=1}^{k+1} c_i \cdot X_i\right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{k} c_i \cdot X_i\right) + c_{k+1} \cdot X_{k+1}\right].$$

Definindo temporariamente a parcela agregada como uma nova variável composta $U = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot X_i$ e a segunda parcela como $V = c_{k+1} \cdot X_{k+1}$, aplicamos o resultado aditivo para duas variáveis que já foi demonstrado anteriormente na Seção 4:

$$E[U + V] = E[U] + E[V].$$

Substituindo de volta as expressões originais de U e V:

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{k} c_i \cdot X_i\right) + c_{k+1} \cdot X_{k+1}\right] = E\left[\sum_{i=1}^{k} c_i \cdot X_i\right] + E[c_{k+1}$$

4 A Propriedade da Linearidade do Valor Esperado

A linearidade é uma das propriedades operacionais mais importantes do valor esperado. Ela permite determinar o valor esperado da soma de quantidades aleatórias calculando separadamente a parcela de cada componente, dispensando métodos complexos de integração em contextos geométricos.

[Linearidade do Valor Esperado] Sejam X e Y duas variáveis aleatórias definidas no mesmo espaço amostral com valores esperados finitos, e sejam a e b números reais constantes. Então:

$$E[a \cdot X + b \cdot Y] = a \cdot E[X] + b \cdot E[Y]$$

Em particular, para a soma simples de duas variáveis:

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

[Demonstração Passo a Passo] Seja X uma variável que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_m$ e Y uma variável que assume os valores $y_1, y_2, \ldots, y_k$. Por definição, o valor esperado da soma $X + Y$ expressa-se através do somatório duplo sobre a distribuição conjunta:

$$E[X + Y] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} (x_i + y_j) \cdot P(X = x_i e Y = y_j)$$

Distribuímos o termo $(x_i + y_j)$ em duas parcelas distintas dentro do somatório duplo:

$$E[X + Y] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} x_i \cdot P(X = x_i e Y = y_j) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} y_j \cdot P(X = x_i e Y = y_j)$$

Colocando as constantes x_i e y_j em evidência nos somatórios internos correspondentes:

$$E[X+Y] = \sum_{i=1}^{m} x_i \left(\sum_{j=1}^{k} P(X = x_i e Y = y_j)\right) + \sum_{j=1}^{k} y_j \left(\sum_{i=1}^{m} P(X = x_i e Y = y_j)\right)$$

Aplicamos a propriedade da probabilidade marginal, onde a soma das probabilidades conjuntas em relação a uma das variáveis recupera a probabilidade univariada:

$$\sum_{j=1}^{k} P(X = x_i e Y = y_j) = P(X = x_i)$$

$$\sum_{i=1}^{m} P(X = x_i e Y = y_j) = P(Y = y_j)$$

Substituindo estas identidades de volta na expressão da soma dupla, obtemos:

$$E[X + Y] = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot P(X = x_i) + \sum_{j=1}^{k} y_j \cdot P(Y = y_j)$$

Como cada somatório isolado corresponde exatamente à definição de valor esperado de cada variável individualmente, concluímos que:

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y].$$

A demonstração para a multiplicação por constantes segue o mesmo princípio algébrico elementar.

4.1 Demonstração Rigorosa da Aditividade sob Dependência Estocástica

Para consolidarmos a base teórica e darmos o passo analítico definitivo que sustenta a modelagem de curvas e agulhas dependentes no estudo subsequente de Buffon, demonstraremos que a propriedade da linearidade do valor esperado, $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$, não requer a hipótese de independência entre as variáveis aleatórias X e Y. Essa demonstração passo a passo, sem saltos lógicos, evidencia por que o operador expectativa comuta perfeitamente com somatórios de variáveis correlacionadas ou rigidamente vinculadas no espaço físico.

[Image of joint probability distribution dependency table diagram]

[Aditividade para Variáveis Dependentes] Sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas definidas em um mesmo espaço amostral finito Ω, assumindo os conjuntos de valores reais $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ e $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$, respectivamente, com distribuições de probabilidade conjunta genérica $P(X = x_i e Y = y_j)$. Se os valores esperados $E[X]$ e $E[Y]$ forem finitos, então:

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y],$$

ainda que X e Y sejam estocasticamente dependentes.

[Demonstração Passo a Passo sem Saltos] Por definição direta do valor esperado aplicado à variável aleatória soma $X + Y$, temos:

$$E[X + Y] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} (x_i + y_j) \cdot P(X = x_i e Y = y_j).$$

Aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição no termo algébrico interno do somatório duplo:

$$E[X + Y] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \left[x_i \cdot P(X = x_i e Y = y_j) + y_j \cdot P(X = x_i e Y = y_j) \right].$$

Utilizamos a propriedade aditiva dos somatórios finitos para separar a expressão em duas parcelas independentes de somas duplas:

$$E[X+Y] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} x_i \cdot P(X = x_i eY = y_j) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} y_j \cdot P(X = x_i eY = y_j).$$

Em seguida, colocamos o fator constante x_i em evidência no somatório interno da primeira parcela e o fator constante y_j em evidência no somatório externo da segunda parcela:

$$E[X+Y] = \sum_{i=1}^{m} x_i \left(\sum_{j=1}^{k} P(X = x_i eY = y_j) \right) + \sum_{j=1}^{k} y_j \left(\sum_{i=1}^{m} P(X = x_i eY = y_j) \right).$$

Por meio dos axiomas fundamentais da teoria de probabilidade e da definição de probabilidade marginal, a soma das probabilidades conjuntas em relação a um dos índices recupera a probabilidade isolada da variável correspondente, independentemente de haver correlação:

$$\sum_{j=1}^{k} P(X = x_i eY = y_j) = P(X = x_i)$$

$$\sum_{i=1}^{m} P(X = x_i eY = y_j) = P(Y = y_j)$$

Substituindo estas identidades marginais de volta na expansão da soma dupla, obtemos:

$$E[X+Y] = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot P(X = x_i)“$$